

# 一类矩阵秩的恒等式

邱红兵

(广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510090)

摘要: 利用分块矩阵的初等变换, 证明了李书超等于 2004 年提出的一类矩阵秩的猜想. 并把此结论推广到了更一般情形.

关键词: 分块矩阵; 秩; 初等变换

中图分类号: O 151

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2007) 01-0082-03

## 引言

文献 [1] 从 Sylvester 公式出发, 得到了一类矩阵秩的恒等式.

定理 1<sup>[1]</sup> 设  $A \in R^{n \times n}$ ,  $a, b \in R$ , 且  $a \neq b$  则有  
 $r(A + aE) + r(A + bE) = r[(A + aE)(A + bE)] + n$ ,  
其中  $r(A)$  表示矩阵  $A$  的秩.

在定理 1 的基础上, 文献 [1] 又提出了此公式有更一般结果的猜想.

猜想<sup>[1]</sup> 设  $A \in R^{n \times n}$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_k \in R$ , 当  $a_1, a_2, \dots, a_k$  满足适当条件时, 有

$$\sum_{i=1}^k r(A + a_i E) = (k-1)n + r\left[\prod_{i=1}^k (A + a_i E)\right].$$

证明了当矩阵满足  $A^2 = 0$  或  $A^2 = A$  时猜想的正确性.

本文利用分块矩阵的初等变换, 证明了文献 [1] 提出的猜想, 并进一步推广了文献 [1] 的结论,

$$r\left[\prod_{i=1}^p (A + a_i E)\right] + r(A + a_{p+1} E) = r\begin{bmatrix} \prod_{i=1}^p (A + a_i E) & 0 \\ 0 & A - bE \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \prod_{i=1}^p (A + a_i E) & - (A - bE)A^{p-1} \\ 0 & A - bE \end{bmatrix} =$$
$$r\begin{bmatrix} \prod_{i=1}^p (A + a_i E) & (\sum_{i=1}^p a_i + b)A^{p-1} + (\sum_{1 \leq i < j \leq p} a_i a_j)A^{p-2} + \dots + (\prod_{i=1}^p a_i)E \\ 0 & A - bE \end{bmatrix}$$

(第二行乘以  $-(\sum_{i=1}^p a_i + b)A^{p-2}$  加到第一行)

$$= r\begin{bmatrix} \prod_{i=1}^p (A + a_i E) & (\sum_{i < j} a_i a_j + b \sum_{i=1}^p a_i + a_{p+1}^2)A^{p-2} + \sum_{i < j < k} a_i a_j a_k + \dots + (\prod_{i=1}^p a_i)E \\ 0 & A - bE \end{bmatrix}$$

(第二行乘以  $-(\sum_{i < j} a_i a_j + b \sum_{i=1}^p a_i + b^2)A^{p-3}$  加到第一行)

得到了一类矩阵秩的一系列恒等式.

## 1 主要结果及证明

定理 2 设  $a_1, a_2, \dots, a_k \in R$ , 若  $a_1, a_2, \dots, a_k$  互不相等, 则对任意  $A \in R^{n \times n}$ , 有

$$\sum_{i=1}^k r(A + a_i E) = (k-1)n + r\left[\prod_{i=1}^k (A + a_i E)\right].$$

证明 (用数学归纳法)

1) 当  $k=1$  时, 结论显然成立.

2) 假定  $k=p$  时结论成立, 即若  $a_1, a_2, \dots, a_p$  互不相等, 则有

$$\sum_{i=1}^p r(A + a_i E) = (p-1)n + r\left[\prod_{i=1}^p (A + a_i E)\right]. \quad (*)$$

3) 当  $k=p+1$  时, 有 (为证明方便, 记  $a_{p+1} = -b$ )

$$= \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^p (A + a_i E) & (\sum_{i < j < l}^p a_i a_j a_l + b \sum_{i < j}^p a_i a_j + b^2 \sum_{i=1}^p a_i + b^3) A^{p-3} + \dots + (\prod_{i=1}^p a_i) E \\ 0 & A - bE \end{pmatrix} \dots =$$

$$\begin{pmatrix} \prod_{i=1}^p (A + a_i E) & \left[ \sum_{i=1}^p a_i + \dots + b^{p-l} \sum_{\substack{\leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq p}} (\prod_{s=1}^l a_{i_s}) + \dots + b^{p-1} \sum_{i=1}^p a_i + b^p \right] E \\ 0 & A - bE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^p (A + a_i E) & \prod_{i=1}^p (a_i + b) E \\ 0 & A - bE \end{pmatrix}.$$

若  $\prod_{i=1}^p (a_i + b) \neq 0$  即  $a_{p+1} \neq a_i (i=1, 2, \dots, p)$  有

$$\begin{pmatrix} \prod_{i=1}^p (A + a_i E) & \prod_{i=1}^p (a_i + b) E \\ 0 & A - bE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ \prod_{i=1}^{p+1} (A + a_i E) & 0 \end{pmatrix} = r \left[ \prod_{i=1}^{p+1} (A + a_i E) \right] + n$$

从而

$$r \left[ \prod_{i=1}^p (A + a_i E) \right] + r(A + a_{p+1} E) = r \left[ \prod_{i=1}^{p+1} (A + a_i E) \right] + n$$

将式 (\*) 代入上式, 得

$$\sum_{i=1}^k r(A + a_i E) = (k-1)n + r \left[ \prod_{i=1}^k (A + a_i E) \right].$$

即  $k=p+1$  时, 结论也成立, 证毕.

由定理 2 中, 容易得到下列结论:

推论 1 设  $A \in R^{n \times n}$ ,  $a, b, c \in R$  且  $a, b, c$  互不相等, 则有

$$r(A + aE) + r(A + bE) + r(A + cE) = r[(A + aE)(A + bE)(A + cE)] + 2n.$$

推论 2 设  $A \in R^{n \times n}$ ,  $a, b, c \in R$  且  $a, b, c$  互不相等, 则  $(A + aE)(A + bE)(A + cE) = 0$  当且仅当  $r(A + aE) + r(A + bE) + r(A + cE) = 2n$ .

推论 3 设  $A \in R^{n \times n}$ , 则有  $r(A^2 - E) + r(A) = r(A^3 - A) + n$ .

推论 4 设  $A \in R^{n \times n}$ , 则  $A^3 = A$  当且仅当  $r(A + E) + r(A - E) + r(A) = 2n$ .

2 进一步推广

用  $P_k(x)$  表示  $k$  次多项式  $x^k + d_{k-1}x^{k-1} + d_{k-2}x^{k-2} + \dots + d_1x + d_0$ , 即

$$P_k(x) = x^k + d_{k-1}x^{k-1} + d_{k-2}x^{k-2} + \dots + d_1x + d_0$$

定理 3 设方程  $P_m(x) = 0$  有  $m$  个不同实根  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ,  $P_t(y) = 0$  有  $t$  个不同的实根  $y_1, y_2, \dots, y_t$ , 若  $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_t$  互不相等, 则有  $r[P_m(A)] + r[P_t(A)] = r[P_m(A)P_t(A)] + n$ .

证明 由已知有

$$P_m(A) = \prod_{i=1}^m (A - x_i E), P_t(A) = \prod_{i=1}^t (A - y_i E),$$

于是, 由定理 2 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m r(A - x_i E) &= (m-1)n + r \left[ \prod_{i=1}^m (A - x_i E) \right], \\ \sum_{j=1}^t r(A - y_j E) &= (t-1)n + r \left[ \prod_{j=1}^t (A - y_j E) \right], \\ \sum_{i=1}^m r(A - x_i E) + \sum_{j=1}^t r(A - y_j E) &= (m+t-1)n + r \left[ \prod_{i=1}^m (A - x_i E) \prod_{j=1}^t (A - y_j E) \right]. \end{aligned}$$

由以上 3 式即得所要结论.

推论 5 设方程  $P_m(x) = 0$  有  $m$  个不同的实根  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ,  $P_t(y) = 0$  有  $t$  个不同的实根  $y_1, y_2, \dots, y_t$ , 若  $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_t$  互不相等, 则  $P_m(A)P_t(A) = 0$  当且仅当  $r[P_m(A)] + r[P_t(A)] = n$ . 更进一步, 我们有如下结论:

定理 4 设方程  $P_{m_i}(x) = 0 (i=1, 2, \dots, t)$  有  $m_i$  个不同的实根  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{m_i}}$ , 若  $x_s$  互不相等, 则有

$$r[P_{m_1}(A)] + r[P_{m_2}(A)] + \dots + r[P_{m_t}(A)] = (t-1)n + r[P_{m_1}(A)P_{m_2}(A)\dots P_{m_t}(A)].$$

证明 反复应用定理 3 即可证明本结论.

参考文献:

[1] 李书超, 蒋君, 向世斌. 一类矩阵秩的恒等式及其推广 [J]. 武汉科技大学学报 (自然科学版), 2004, 27(1): 96-98.

Rank Identities of a Class of Matrices

QU Hong-bing

(Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)

**Abstract** Some rank identities of a class of matrices are obtained with the block matrices and its generalized elementary operation

**Key words** block matrix; rank; generalized elementary operation

参考文献著录中存在的问题及注意事项

文后参考文献是论著的必要组成部分。著录参考文献的意义和作用,简要归纳如下:

- 1) 体现科学的继承性, 尊重知识产权;
- 2) 精练文字, 缩短篇幅;
- 3) 便于编辑和审稿人评价论著水平;
- 4) 与读者达到信息资源共享;
- 5) 利于通过引文分析对期刊水平做出客观评价;
- 6) 促进科学情报和文献计量学研究, 推动学科发展。

许多来稿在参考文献著录方面存在不少问题,与著录规则的要求差距较大。

1) 采用顺序编码制时, 只列文后参考文献表, 未将参考文献序号标识在文内引文处; 或者不按所引文献在文中出现的先后顺序编码, 而是先列参考文献表, 后将表中的著录项序号注入文中, 结果常常是先出现的文献序号比后出现的大。应注意, 采用顺序编码制时, 须按引用的文献在论文中出现的先后顺序编码, 此序号即是文后参考文献表中各条文献的标引项序号, 它们应一一对应。

2) 文中参考文献的序号是上角标还是作为语句的组成部分未分清, 两者常常混淆起来。应注意, 凡不是语句组成部分的文献序号及其方括号, 须排作右上角标。

3) 文后参考文献表中著录项目不齐全。例如: 一般缺少作者姓名, 如只写出第一作者就加“等”; 缺少期刊卷号或期号的现象比较普遍; 不著录引文在原文献中的位置 (页码) 的情况更为多见。为使著录项目完整, 除了要熟悉规则, 作者还应在查阅文献时仔细作记录, 切勿漏记、错记, 否则时过境迁, 想补齐、想核对有时非常困难。

4) 文后参考文献表中著录项目的次序、著录符号等不符合要求, 十分混乱。原因是不熟悉著录格式。

2005 年 3 月 23 日, 国家质量监督检验检疫总局和中国标准化管委会发布了 GB/T 7714—2005《文后参考文献著录规则》, 代替 GB 7714—1987。该标准非等效采用国际标准 ISO 690 和 ISO 690-2, 规定了各个学科、各种类型出版物的文后参考文献的著录项目、著录顺序、著录用的符号、各个著录项目的著录方法以及参考文献在正文中的标注法。请广大作者撰写科技论文时对照执行。